2015年　東大理系数学　第4問

(1) $r_n = \dfrac{p_{n+1}^2+p_n^2+1}{p_n p_{n+1}}$ とおく。

考え方　r_n が n によらない。(n によって変化しない)
⇔ $r_{n+1} = r_n$ を導く。

$$r_{n+1} = \frac{p_{n+2}^2+p_{n+1}^2+1}{p_{n+1}p_{n+2}} = \frac{\left(\frac{p_{n+1}^2+1}{p_n}\right)^2+p_{n+1}^2+1}{p_{n+1}\times\frac{p_{n+1}^2+1}{p_n}}$$

$\div\; p_{n+1}^2+1$

$$= \frac{\frac{p_{n+1}^2+1}{p_n^2}+1}{p_{n+1}\times\frac{1}{p_n}} = \frac{p_{n+1}^2+p_n^2+1}{p_n\cdot p_{n+1}} = r_n$$

Q.E.D

(2) $r_n = r_{n-1} = \cdots = r_1 = \dfrac{p_2^2+p_1^2+1}{p_1\cdot p_2} = \dfrac{2^2+1^2+1}{1\times 2} = 3$

よって $r_n = \dfrac{p_{n+1}^2+p_n^2+1}{p_n p_{n+1}} = 3$

現状把握と方針

・使える式　① $p_{n+2} = \dfrac{p_{n+1}^2+1}{p_n}$　　② $\dfrac{p_{n+1}^2+p_n^2+1}{p_n p_{n+1}} = 3$

p_n, p_{n+1}, p_{n+2} の3項間　　p_n と p_{n+1} の2項間

・求める式　$p_{n+1}+p_{n-1}$ を p_n で表す

p_{n-1}, p_n, p_{n+1} の3項間

⇒ ①の n を $n-1$ に変えた。$p_{n+1} = \dfrac{p_n^2+1}{p_{n-1}}$

② そのもの。

② の n を $n-1$ に変えた。$\dfrac{p_n^2+p_{n-1}^2+1}{p_{n-1}p_n} = 3$

の3本を使って式変形すべし。

使えそうな式は、

$$p_{n+1} = \frac{p_n^2+1}{p_{n-1}} \quad ④,\qquad \frac{p_{n+1}^2+p_n^2+1}{p_n p_{n+1}} = 3 \quad ⑤,\qquad \frac{p_n^2+p_{n-1}^2+1}{p_{n-1}p_n} = 3 \quad ⑥$$

の3本。

⑤ ⇔ $p_n^2+1 = 3p_n p_{n+1} - p_{n+1}^2$

⑥ ⇔ $p_n^2+1 = 3p_n p_{n-1} - p_{n-1}^2$

連立して、$3p_n p_{n+1} - p_{n+1}^2 = 3p_n p_{n-1} - p_{n-1}^2$

⇔ $3p_n(p_{n+1}-p_{n-1}) = p_{n+1}^2 - p_{n-1}^2$
$= (p_{n+1}+p_{n-1})(p_{n+1}-p_{n-1})$

$p_{n-1} \neq p_{n+1}$ より、両辺を $p_{n+1}-p_{n-1}$ で割り、

$p_{n+1}+p_{n-1} = 3p_n$

④を使わず解いたが、④ ⇔ $p_n^2+1 = p_{n+1}\cdot p_{n-1}$ として、⑤と⑥に代入しても解ける。

(3) 以下、数学的帰納法で証明する。

整数の証明なら、帰納法

(i) $p_1 = 1$　$q_1 = 1$　より　$p_1 = q_1$
$p_2 = 2$　$q_3 = q_1+q_2 = 2$　$p_1 = q_3$　より成立

(ii) $p_k = q_{2k-1}$ ⑦ と $p_{k+1} = q_{2k+1}$ ⑧ が成立すると仮定する。

$p_{k+2} = q_{2k+3}$ となればよいので、
$p_{k+2} - q_{2k+3} = 0$ を示す。

等式の証明は、差をとって0

(2)の結果 $p_{n+1}+p_{n-1} = 3p_n$
q_n の定義式 $q_{n+2} = q_{n+1}+q_n$

$p_{k+2} - q_{2k+3}$

$= (3p_{k+1} - p_k) - (q_{2k+2} + q_{2k+1})$

pの数列をqの数列へ

$= 3q_{2k+1} - q_{2k-1} - q_{2k+2} - q_{2k+1}$

$= 2q_{2k+1} - q_{2k-1} - q_{2k+2}$

qの数列の順番を真ん中に寄せる。

$= 2q_{2k+1} - (q_{2k+1} - q_{2k}) - (q_{2k+1} + q_{2k})$

$= 0$　　以上、証明完了。

おまけ

・$p_1 = 1$　$p_2 = 2$、$p_{n+2} - 3p_{n+1} + p_n = 0$ の3項間漸化式を解くと、

$$p_n = \frac{\sqrt5-5}{10}\times\left(\frac{3-\sqrt5}{2}\right)^{n-1} + \frac{\sqrt5+5}{10}\times\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)^{n-1}$$

・$q_1 = 1$　$q_2 = 1$　$q_{n+2} - q_{n+1} - q_n = 0$ の3項間漸化式を解くと、

$$q_n = \frac{\sqrt5-5}{10}\times\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-1} + \frac{\sqrt5+5}{10}\times\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1}$$

計算すると、$p_n = q_{2n-1}$ となります。